هم کلاسی

Hamkelasi.ir

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

فصل ۲

مثلثات

از نامگذاری مثلثات می توان حدس زد که این شاخه از ریاضیات دست کم در آغاز پیدایش خود به نحوی با ”مثلث” و مساله های مربوط به مثلث ارتباط داشته است . در واقع پیدایش و پیشرفت مثلثات را باید نتیجه ای از تلاش های ریاضی دانان در جهت رفع دشواری های مربوط به محاسبه هایی دانست که در هندسه و در اخترشناسی رو به روی دانشمندان بوده است . در ضمن دشواری های هندسی ، خود ناشی از مساله هایی بوده است که دانشمندان در اخترشناسی با آن رو به رو می شده اند و بیشتر جنبه ی محاسباتی داشته اند . پس احتمالاً مثلثات برای استفاده از ستاره شناسی (اخترشناسی) ایجاد شده و کاربرد های اولیه آن نیز در همین باره بوده است .در اخترشناسی اغلب به مساله هایی برخورد می کنیم که برای حل آن ها به مثلثات و دستورهای آن نیازمندیم .ساده ترین این مسائل، پیدا کردن یک کمان دایره (برحسب درجه) است ، وقتی که شعاع دایره و طول وتر این کمان معلوم باشد یا برعکس ، پیدا کردن طول وتری که طول شعاع دایره و اندازه کمان آن معلوم باشد . کهن ترین جداولی که از دانشمندان قدیمی به جای مانده است ،متعلق به اخترشناسان و ریاضی دانان سده ی دوم میلادی‌است و شاید بتوان این جداول را نخستین گام در پیدایش مثلثات دانست ولی همه‌ی کارهای این ریاضی‌دانان و اخترشناسان که یونانی بوده اند،در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم های اصلی مثلثات نرسیده اند .

نخستین گام های اصلی به وسیله‌ی آریابهاتا ریاضی‌دان هندی سده‌ی پنجم میلادی برداشته شد که در واقع تعریفی برای نیم وتر یک کمان داد. از این به بعد به تقریب همه کارهای مربوط به شکل گیری‌مثلثات (چه در روی صفحه و چه در روی کره) به وسیله ی دانشمندان ایرانی انجام گرفت .

خوارزمی نخستین جدول های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ی ریاضی دانان ایرانی گام هایی در جهت تکمیل جدول ها و گسترش مفهوم های مثلثاتی برداشتند .احمدابن عبدالله حبش حاسب جدول سینوس ها را تقریباً ۳۰ درجه به ۳۰ درجه تنظیم کرد و برای گسترش و برای نخستین بار به دلیل نیاز های اخترشناسی مفهوم ” تانژانت ” را تعریف کرد. جدی ترین تلاش ها بوسیله ی ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت که توانستند مثلثات را تا جایی پیش ببرند که مثلث کروی را هم حل کنند . ابوالوفا با روش جالبی به یاری نابرابری ها توانست مقدار سینوس کمان ۳۰ دقیقه را پیدا کنند و سرانجام خواجه نصیرالدین طوسی با

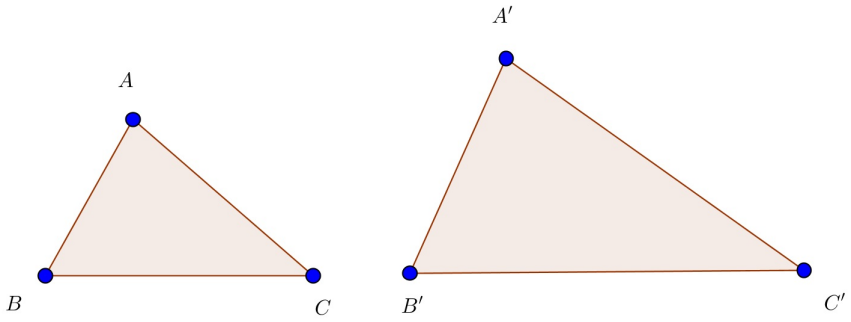
@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

جمع بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود ، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت [۱] . بعد از طوسی جمشید کاشانی ریاضی دان ایرانی زمان تیموریان با روش زیبایی که برای حل معادله ی درجه سوم پیدا کرده بود ،توانست راهی برای محاسبه ی کمان یک درجه با هر دقت دلخواه پیدا کند.

پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سده ی پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت .یک نمونه از مواردی که ایرانی بودن این دانش را نشان میدهد از این قرار است :ریاضی دانان ایرانی برای سینوس از واژه‌ی «جیب » و برای کسینوس از واژه‌ی «جیب تمام» استفاده می کردند. وقتی نوشته های ریاضی دانان به ویژه خوارزمی به زبان لاتین و زبان اروپایی ترجمه شد، معنای واژه ی جیب را در زبان خود به جای آن گذاشتند سینوس . این کلمه در لاتین همان معنای جیب را در عربی دارد .

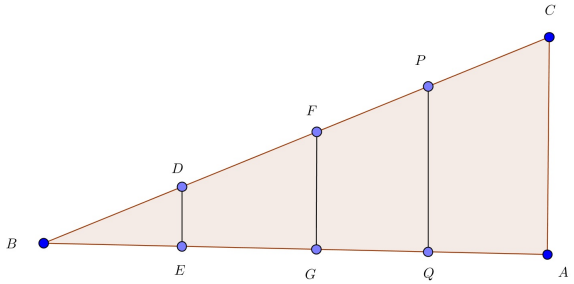
۱.۲ نسبت‌های مثلثاتی

از کلاس نهم می دانید چنانچه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند دو مثلث متشابه‌اند. در شکل زیر دو مثلث ABC , $A'B'C'$ متشابه‌اند.



$$\begin{cases} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B' \end{cases} \Longrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

حال در دو مثلث قائم‌الزاویه برابری تنها یک زاویه حاده از مثلث اولی با یک زاویه حاده از مثلث دومی برای تشابه دو مثلث کفایت می‌کند.(چرا؟)



در شکل بالا داریم $A = E = G = Q = ۹۰^\circ$ ولذا مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در راس B مشترکند متشابه

[۱] نام این کتاب کشف القناع فی اسرارشکل القطاع می‌باشد.

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

هستند. حال اگر نسبت تشابه را در این مثلث‌ها بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{DE}{BE}=\frac{FG}{BG}=\frac{PQ}{BQ}=\frac{CA}{BA}$$

پس برای زاویه B همه این نسبت‌ها مقداری ثابت است . برای این نسبت ثابت نامی انتخاب می‌کنیم. این نام تانژانت زاویه B است. پس داریم:

$$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{\textbf{ضلع مقابل}}{\textbf{ضلع مجاور}}$$

عکس نسبت تانژانت را کتانژانت می‌نامیم. پس داریم:

$$\cot B=\frac{AB}{AC}=\frac{\textbf{ضلع مجاور}}{\textbf{ضلع مقابل}}$$

به همین ترتیب در این مثلث‌های متشابه نسبت‌های زیر نیز ثابت‌اند و باید نامی برای آنها انتخاب کرد.

$$\frac{DE}{BD}=\frac{FG}{BF}=\frac{PQ}{PB}=\frac{AC}{AB}$$

و

$$\frac{BE}{BD}=\frac{BG}{BF}=\frac{BQ}{BP}=\frac{AB}{BC}$$

اولی را سینوس و دومی را کسینوس می‌نامند. پس داریم:

$$\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{\textbf{مقابل}}{\textbf{وتر}}$$

$$\cos B=\frac{AB}{BC}=\frac{\textbf{مجاور}}{\textbf{وتر}}$$

تعریف ۱.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه نسبت‌های ، سینوس،کسینوس،تانژانت،کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

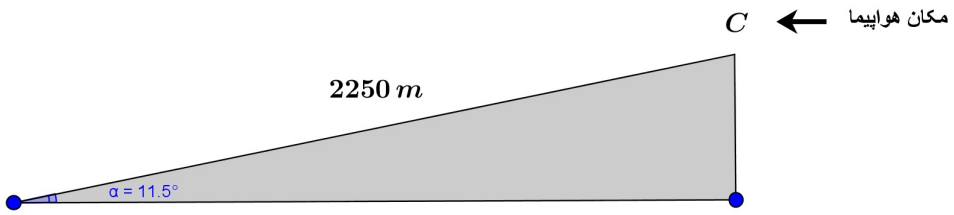
مثال ۱.۲. دریک مثلث قائم الزاویه به اضلاع زاویه قائمه ۱۲ و ۵ واحد تمام نسبت‌های مثلثاتی زوایای حاده را محاسبه کرده و مقایسه کنید.

مثال ۲.۲. در مثلث قائم‌الزاویه $(\angle A=۹۰^\circ)$, ABC داریم: $AC=۲$, $\sin B=\frac{۱}{۳}$ مطلوبست محاسبه $\tan B$, $\cos B$.

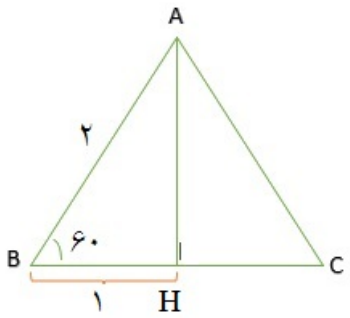
مثال ۳.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه طول وتر برابر ۱۰ واحد است و تانژانت یکی از زوایای حاده برابر $\frac{۳}{۴}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

مثال ۴.۲. مطابق شکل زیر هواپیمایی در نقطه C در آسمان با خطی سیری که با افق زاویه‌ی ۱۱٫۵ درجه می‌سازد به سمت فرودگاه در حال کاهش ارتفاع است. اگر هواپیما در امتداد مایل خط سیر خود ۲۲۵۰ متر طی کند تادر نقطه B در ابتدای باند به زمین بنشیند ، معین کنید هواپیما در چه ارتفاعی در نقطه C قرار داشته است. ($\tan 11.5^\circ \approx 0.2$)

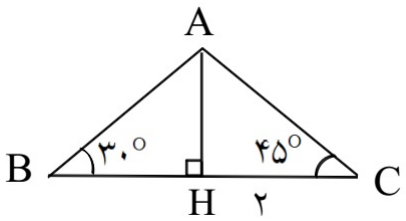


مثال ۵.۲. به کمک یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد و رسم یک ارتفاع آن نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه را محاسبه کنید.



مثال ۶.۲. یک مربع به ضلع یک رسم کرده و با رسم قطر آن نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵ درجه را محاسبه کنید.

مثال ۷.۲. با توجه به شکل زیر مقدار BH را محاسبه کنید.



تمرین ۱.۲. در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم: $BC = ۵$, $AC = ۳$, $\angle A = ۹۰$ مطلوبست محاسبه:
$\sin B - \cos B$

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

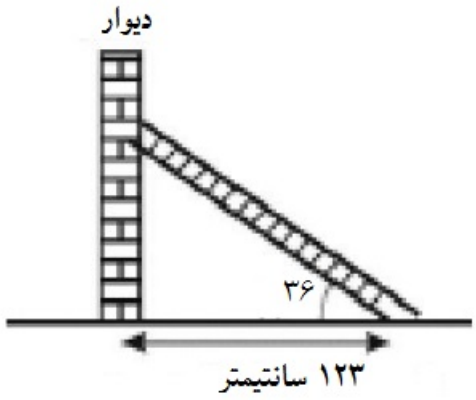
تمرین ۲.۲. مقدار عددی عبارات زیر را بدست آورید

۱. $\sin^{۲} ۴۵^\circ + \cos^{۲} ۴۵^\circ = ?$

۲. $\dfrac{\tan ۴۵^\circ - \tan ۶۰^\circ}{۱ + \tan ۴۵ \times \tan ۶۰^\circ} = ?$.

۳. $۱ + \sin ۳۰^\circ + \cos^{۲} ۴۵^\circ + ۴ \sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ = ?$

تمرین ۳.۲. در شکل روبرو طول نردبان را بیابید.($\cos ۳۶^\circ \approx ۰/۸$)

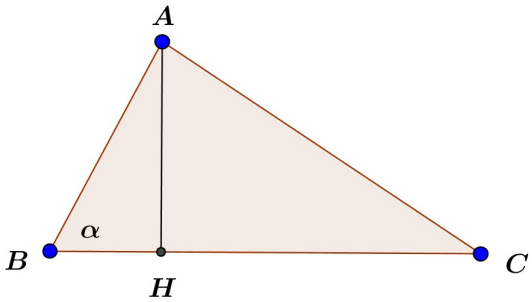


تمرین ۴.۲. سکوی پرتاب موشکی در ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین قرار دارد. موشک تحت زاویه ۶۰ درجه پرتاب می‌شود و به حرکت خود تحت همین زاویه ادامه می دهد. اگر سایه موشک روی سطح زمین ۱۰۰۰ متر طی کرده باشد خود موشک در چه ارتفاعی است و چه مسافتی در امتداد خط سیر خود طی کرده است؟

مساحت مثلث بر حسب نسبت‌های مثلثاتی

از گذشته می دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصلضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیر به آن ارتفاع. حال در شکل زیر می‌خواهیم مساحت مثلث ABC را محاسبه کنیم. برای این منظور می‌نویسیم:

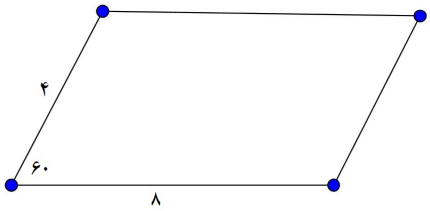
$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{AB \times \sin\alpha \times BC}{۲} = \frac{۱}{۲} AB \times BC \sin\alpha$$



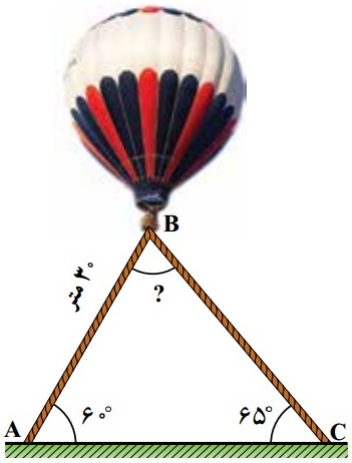
$$AH = AB \times \sin B = AB \times \sin\alpha$$

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

مثال ۸.۲. مساحت متوازی‌الاضلاع زیر را بدست آورید.



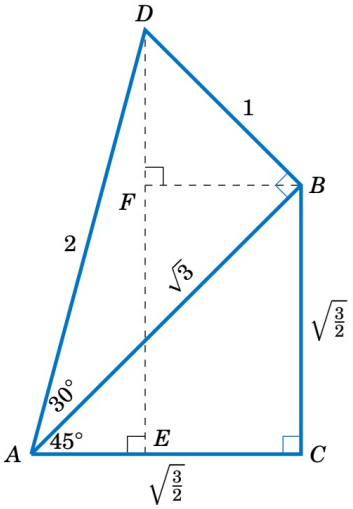
مثال ۹.۲. در شکل زیر بالنی تبلیغاتی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول طناب دوم را بیابید.



بحث نسبت‌های مثلثاتی را با ارائه چند مثال کاربردی و متنوع پی می‌گیریم.

مثال ۱۰.۲. زاویه حاده A در مثلثی چنان است که $\sin A = \frac{۲}{۳}$ مطلوبست محاسبه سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه.

مثال ۱۱.۲. با توجه به شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۷۵° را بدست آورید.



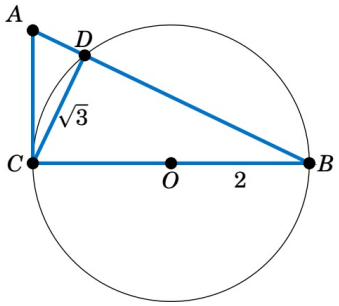
مثال ۱۲.۲. ثابت کنید در یک مثلث قائم‌الزاویه با دو زاویه حاده B , C همواره داریم: $\sin B = \cos C$ و همین‌طور $\tan B = \cot C$.

مثال ۱۳.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حاده A داریم: $\tan A = ۳$. مطلوبست محاسبه سایر

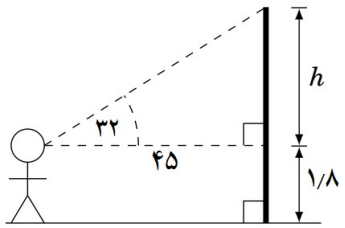
@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

نسبت‌های مثلثاتی زاویه A.

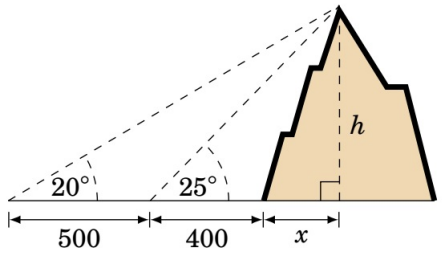
مثال ۱۴.۲. در شکل زیر CB قطر دایره‌ای است به شعاع ۲. مثلث ABC در راس C قائمه است و $CD = \sqrt{۳}$. اولا مقدار $\sin A$ را بدست آورید.ثانیا طول دو پاره‌خط AD , AC را محاسبه کنید.ثالثا مساحت ABC را به طریق معمول و مثلثاتی بیابید.



تمرین ۵.۲. شخصی روبروی یک پرچم ایستاده است و به بالاترین نقطه پرچم نگاه می‌کند. زاویه دید چشمی این شخص برابر ۳۲ درجه است.(زاویه‌ی دید که نسبت به سطح افق و بالاترین نقطه میله پرچم است) ارتفاع چشم این شخص از سطح زمین برابر ۱٫۸متر است و فاصله این شخص تا میله پرچم ۴۵ متر. طول میله پرچم را بیابید.



تمرین ۶.۲. شخص در فاصله ۴۰۰ متری کوهی ایستاده است و به بلندترین نقطه از کوه نگاه می‌کند. زاویه دید این شخص نسبت به افق برابر ۲۵ درجه است. وی سپس به اندازه ۵۰۰ متر به عقب برمی‌گردد و باز هم به بالاترین نقطه قله نگاه می‌کند و این‌بار زاویه دید برابر ۲۰ درجه است. ارتفاع کوه را با توجه به شکل بیابید.



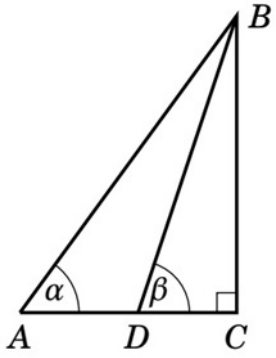
@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

تمرین ۷.۲. با توجه به شکل زیر موارد خواسته شده را ثابت کنید.

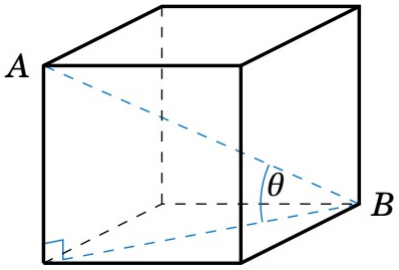
(a) $BC = \dfrac{AD}{\cot\alpha - \cot\beta}$

(b) $AC = \dfrac{AD \cdot \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$

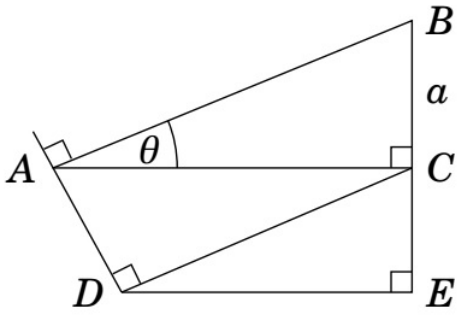
(c) $BD = \dfrac{AD \cdot \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$



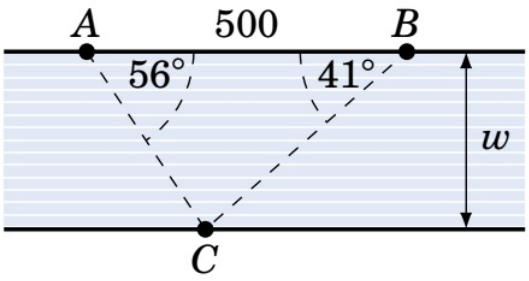
تمرین ۸.۲. مطابق شکل زیر مکعبی به ضلع a مفروض است. اولا طول قطر مکعب را بیابید. ثانیا اندازه زاویه θ را محاسبه کنید.



تمرین ۹.۲. در شکل زیر مقادیر a , θ را معلوم فرض کنید و طول های AC, AB, AD, DC, CE, DF را بر حسب این دو مقدار معلوم یعنی a , θ بیابید.



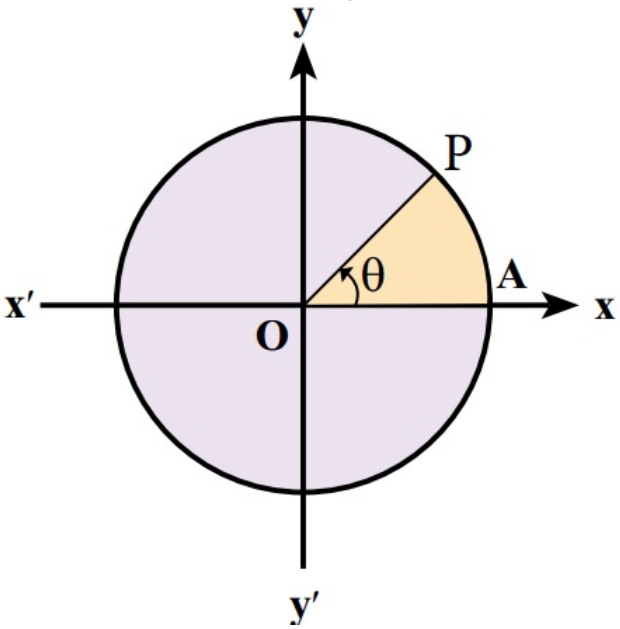
تمرین ۱۰.۲. درشکل زیر دو ساحل رودخانه موازی اند. با توجه به اطلاعات داده شده عرض رودخانه را بدست آورید.



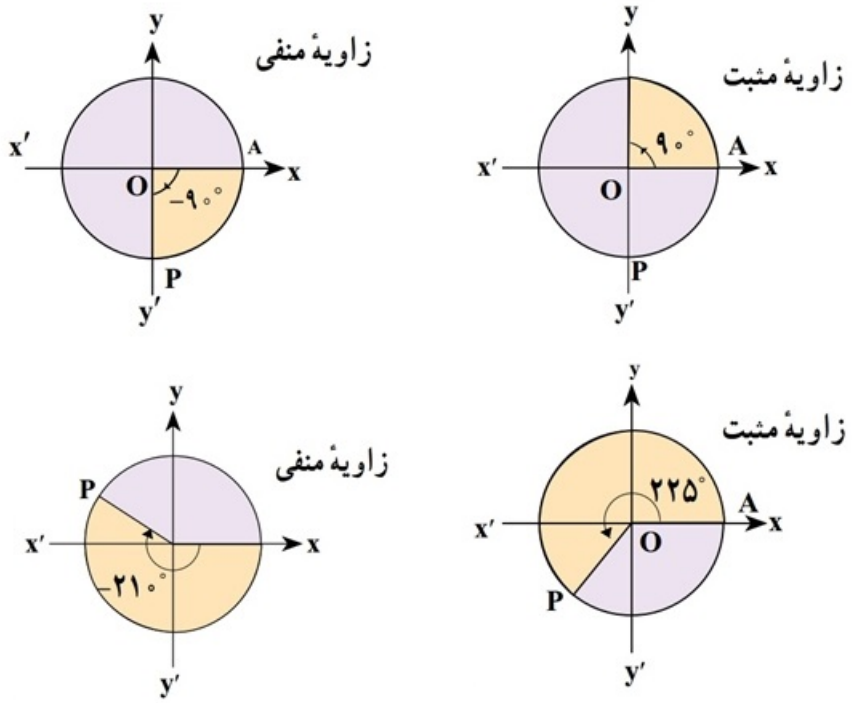
@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

۲.۲ دایره مثلثاتی

پرسشی که بطور طبیعی به ذهن می‌رسد این است که نسبت‌های مثلثاتی در مورد زوایای غیرحاده تعریف می‌شود؟ مثلا برای زاویه ۱۵۰ درجه می‌توان سینوس تعریف کرد و چگونه؟ جواب مثبت است. اما مثلث قائم‌الزاویه دیگر جوابگوی این تعریف نیست. دایره مثلثاتی را برای این منظور معرفی می‌کنیم.دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبداء مختصات. اگر از نقطه $A(۱, ۰)$ و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت سروع به حرکت کنیم زاویه‌ای مثبت تولید خواهد شد. در صورت چرخش در جهت عقربه‌های ساعت زاویه‌ی منفی حاصل می‌شود.

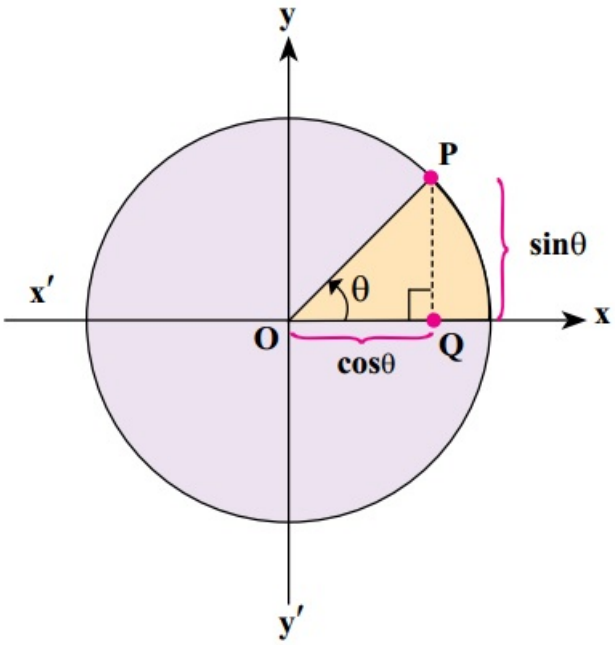


در شکل زیر چند زاویه مثبت و منفی در دایره مثلثاتی دیده می‌شود.



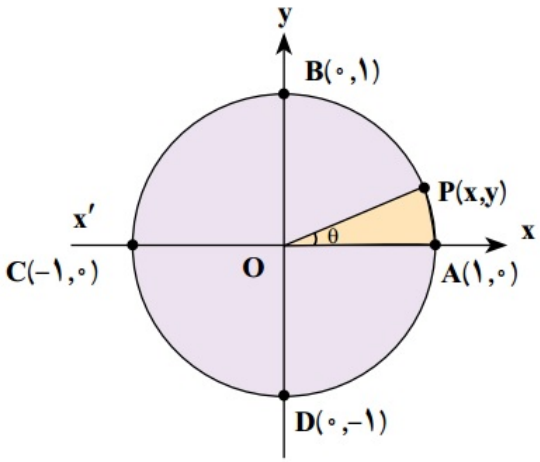
@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

حال نقطه $p(x,y)$ را در نظر بگیرید. از نقطه p عمودی بر محور طول‌ها رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی حاصل نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را محاسبه می‌کنیم.



$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = y \qquad \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = x$$
$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y}$$

مثال ۱۵.۲. در دایره مثلثاتی زیر نقاط D, C, B, A به‌ترتیب متناظر به زوایای ۰، ۹۰، ۱۸۰، ۲۷۰هستند. نسبت‌های مثلثاتی این زوایا را بدست آورید.



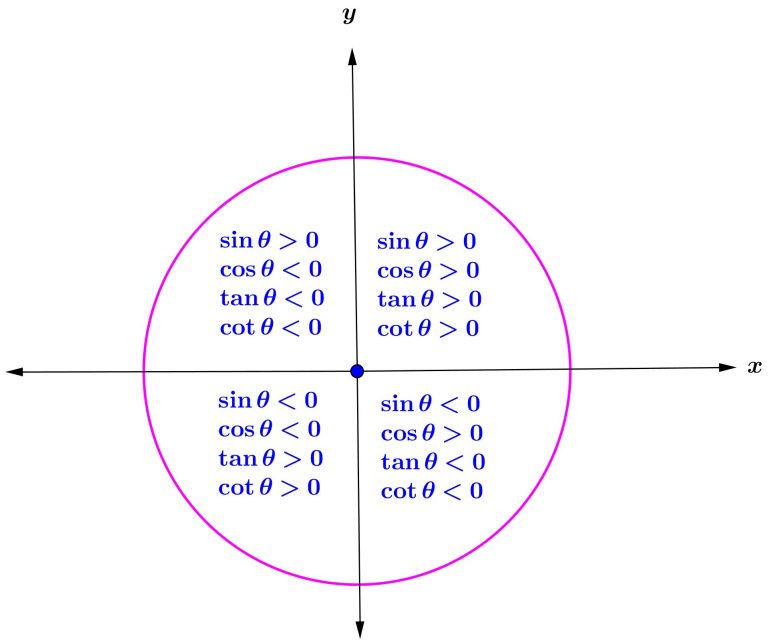
مثال ۱۶.۲. نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۲۵ درجه را بیابید.

مثال ۱۷.۲. زاویه θ در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است و $\sin\theta = \frac{۵}{۷}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

چند تذکر مهم:

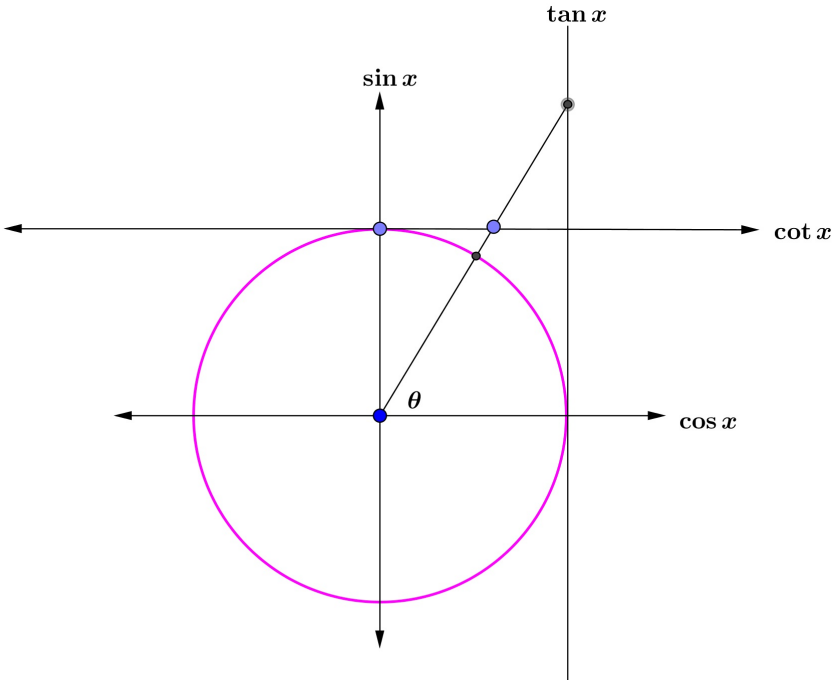
۱. علامت نسبت‌های مثلثاتی با توجه به هر ناحیه در جدول زیر گردآوری شده است.



۲ . با توجه به دایره مثلثاتی و تعریف نسبت های مثلثاتی متوجه می‌شویم که همواره $-۱ \leq \sin\theta \leq ۱$ و همین‌طور $-۱ \leq \cos\theta \leq ۱$. اما در مورد دو نسبت دیگر یعنی $\cot\theta$, $\tan\theta$ این‌گونه نیست. در واقع این دو نسبت هر مقداری می‌توانند باشند، چه مثبت و چه منفی. به زبان ریاضی:

$$\sin\theta \in [-۱, ۱] \ , \ \cos\theta \in [-۱, ۱] \ , \ \tan\theta, \cot\theta \in (-\infty, +\infty)$$

۳ . شکلی دیگری از دایره مثلثاتی نیز مرسوم است که در آن چهار محور به نام نسبت های مثلثاتی بصورت زیر وجود دارد.

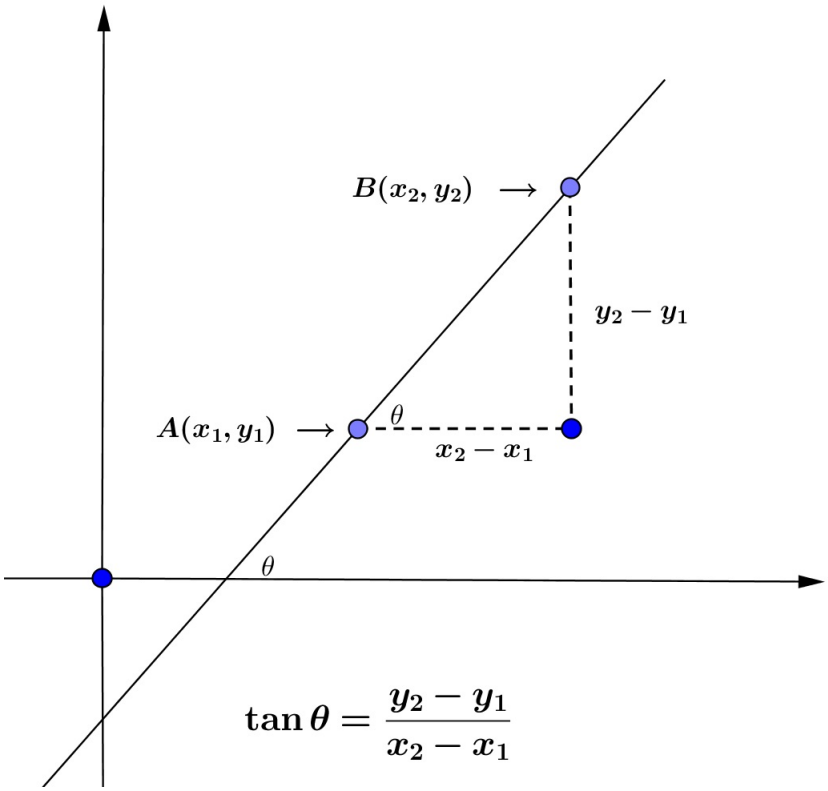


از روی شکل فوق بهتر متوجه خواهید شد که چرا مثلا $\tan\theta$ می تواند هر مقداری را اختیار کند.

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

۴ . درکلاس نهم معادله خط و مفهوم شیب را خوانده اید. برای یک خط که از نقاط $B(x_۲, y_۲), A(x_۱, y_۱)$ می‌گذرد شیب چنین تعریف می‌شود:

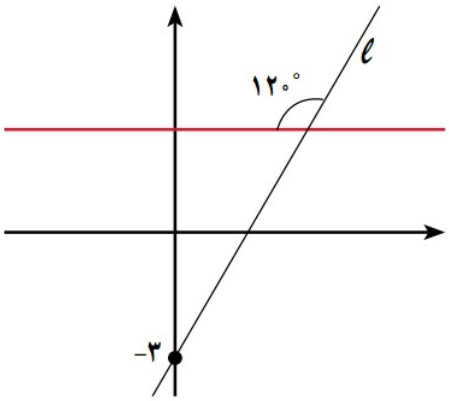
$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$



همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد برابر شیب خط است.از این نکته می‌توان در نوشتن معادله خط استفاده کرد.

درس را با حل مثال های متنوع پی می‌گیریم.

مثال ۱۸.۲. با توجه به شکل معادله خط ℓ را بنویسید.



@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

مثال ۱۹.۲. اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم باشد و $\tan\alpha = -\frac{۵}{۳}$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

مثال ۲۰.۲. زاویه α به گونه‌ای است که $\cos\alpha = \frac{۱}{۳}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بیابید.

مثال ۲۱.۲. فرض کنید $۰ \leq \alpha \leq ۶۰^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{m-۱}{۲}$ باشد حدود تغییرات mرا بیابید.

مثال ۲۲.۲. کمترین و بیشترین مقدار عبارت $\frac{۱۰}{۴+۳\sin x}$ را بدست آورید.

۳.۲ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

شاید تا الان متوجه شده باشید که چهار نسبت مثلثاتی علیرغم نام‌های متفاوت با هم ارتباط نزدیکی دارند. این روابط را در زیر فهرست کرده‌ایم و به دنبال آن دلیل درستی آن ها را ذکر خواهیم کرد.

۱) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

۲) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

۳) $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱ \longrightarrow \begin{cases} \sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x \\ \cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x \end{cases}$

۴) $۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$

۵) $۱ + \cot^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x}$

مثال ۲۳.۲. فرض کنید $\cos x = -\frac{۱}{۳}$ باشد و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

مثال ۲۴.۲. ثابت کنید همواره رابطه $(۱-\sin x)(۱+\sin x)(۱+\tan^۲ x) = ۱$ برقرار است.

مثال ۲۵.۲. فرض کنید $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}$ باشد دراین صورت مقدار عبارت $\frac{\cos^۴ x - \sin^۴ x}{\sin x - \cos x}$ را بیابید.

مثال ۲۶.۲. درستی رابطه $\frac{\sin^۲\alpha - \tan^۲\alpha}{\cos^۲\alpha - \cot^۲\alpha} = \tan^۶\alpha$ را بررسی کنید.

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

مثال ۲.۲۷. ثابت کنید رابطه زیر همواره برقرار است.

$$\cos^۲ x(۱ + ۲\tan^۲ x) + (\cos x - ۱)(\cos x + ۱) = ۱$$

مثال ۲.۲۸. درستی رابطه زیر را ثابت کنید.(مسابقات ریاضی دبیرستانی آمریکا ۲۰۰۲)

$$\sqrt{\sin^۴ x + ۴\cos^۲ x} - \sqrt{\cos^۴ x + ۴\sin^۲ x} = \cos^۲ x - \sin^۲ x$$

مثال ۲.۲۹. اگر $۱ - \cos\theta = \frac{۵}{۳}$ و $\tan\theta \times \cos\theta > ۰$ باشد معین کنید انتهای کمان θ در کدام ناحیه است؟

تمرین ۲.۱۱. ثابت کنید رابطه‌ی زیر همواره درست است.

$$۳(\sin^۴ x + \cos^۴ x) - ۲(\sin^۶ x + \cos^۶ x) = ۱$$

تمرین ۲.۱۲. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۱ - \sin\alpha} + \frac{۱}{۱ + \sin\alpha} - ۲\tan^۲\alpha = ۲$$

تمرین ۲.۱۳. درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{۱ + \cos x}{\sin^۳ x} = \frac{۱}{\sin x(۱ - \cos x)}$$

تمرین ۲.۱۴. درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{۱}{\sin^۴ x} - \frac{۱}{\sin^۲ x} - \cot^۴ x = \cot^۲ x$$

تمرین ۲.۱۵. درستی رابطه‌ی زیر را تحقیق کنید.

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha\ \cos\alpha}$$

تمرین ۲.۱۶. اگر $\cot x = \frac{۳}{۴}$ باشد حاصل $\frac{۴}{\sin x} - \frac{۳}{\cos x}$ را بیابید.

تمرین ۲.۱۷. اگر $\sin x = -\frac{۱}{۲}$ باشد و $\cos x < ۰$، مقدار $\sin x$ را بیابید.

تمرین ۲.۱۸. کدام نامساوی درست است؟

۱. $\sin ۵۰^\circ < \sin ۴۰^\circ$

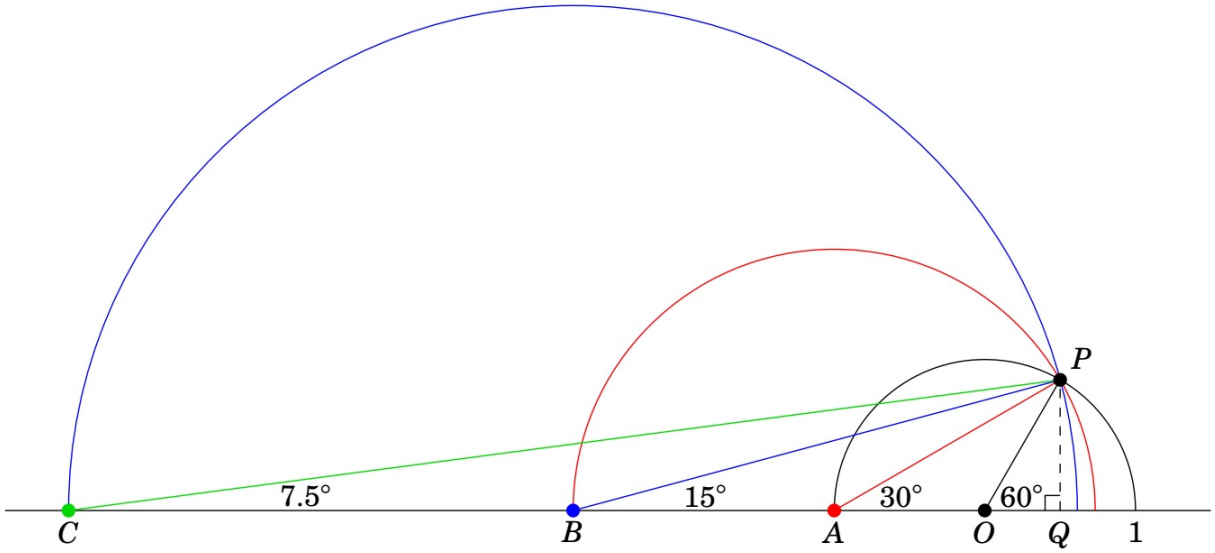
۲. $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

۳. $\tan ۵۰^\circ < \tan ۴۰^\circ$

۴. $\cot ۴۰^\circ < \cot ۵۰^\circ$

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

تمرین ۱۹.۲. به شکل زیر به دقت نگاه کنید. در این شکل ارتباط بین یک زاویه و نصف آن زاویه دیده کی‌شود. به کمک این شکل نسبت مثلثاتی زاویه ۱۵ درجه را بیابید.



@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

۴.۲ تست‌های فصل دوم

۱- ساده شده‌ی عبارت $(۱ - \tan^۲\theta)(۱ - \sin^۲\theta)$ کدام است؟

۱) $۲\cot^۲\theta$ ۲) $۲\tan^۲\theta$ ۳) $۱ - ۲\cos^۲\theta$ ۴) $۱ - ۲\sin^۲\theta$

۲- حاصل $\frac{۱}{\sin^۴\theta} - \frac{۱}{\sin^۲\theta} - \cot^۴\theta$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\tan^۲\theta$ ۴) $\cot^۲\theta$

۳- با فرض $\cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ حاصل عبارت $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta + \frac{۱}{۱ + tg^۲\theta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴- حاصل عبارت $\frac{۱+\cos\theta}{\sin^۳\theta} - \frac{۱}{\sin\theta(۱-\cos\theta)}$ کدام است؟ $(k \in Z, \theta \neq k\pi)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sin\theta$ ۴) $\cos\theta$

۵- حاصل $\left(\frac{۱}{۱ - \sin\theta} + \frac{۱}{۱ + \sin\theta}\right) - ۲tg^۲\theta$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۶- اگر $M\left(-۱, -\sqrt{۳}\right)$ و θ زاویه‌ی شعاع $\overrightarrow{OM}$ با جهت مثبت محور xها باشد، $\sin\theta$ کدام است؟ (O مبداء مختصات است.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۷- اگر $\frac{-\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ باشد، گزاره‌ی $\cos ۳x = \frac{m - ۱}{۲}$ به ازای چه مقادیری از m برقرار است؟

۱) $۲ < m \leq ۳$ ۲) $-۱ < m \leq +۱$ ۳) $۰ < m \leq ۲$ ۴) $۰ < m < ۱$

۸- ساده شده‌ی عبارت $(۱ - \sin^۲\theta)(۱ - tg^۲\theta)$ کدام است؟

۱) $۲\cot g^۲\theta$ ۲) $۲tg^۲\theta$ ۳) $۱ - ۲\cos^۲\theta$ ۴) $۱ - ۲\sin^۲\theta$

۹- حاصل $۲\sin^۲۳۰^\circ - ۱$ برابر با کدام است؟

۱) $\cos ۴۵^\circ$ ۲) $\sin ۶۰^\circ$ ۳) $\cos ۶۰^\circ$ ۴) $tg ۴۵^\circ$

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

۱۰- عبارت $tg^{۲}\theta\left((Sin\theta + Cos\theta)^{۲} - ۱\right)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $۲Sin^{۳}\theta$ ۲) $Sin^{۲}\theta + tg\theta$ ۳) $Sin^{۲}\theta$ ۴) $۲Sin^{۲}\theta . tg\theta$

۱۱- اگر $tg x = \frac{۲m}{۳}$ و $\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲}$ باشد، آن‌گاه حدود m کدام است؟

۱) $m > \frac{۳}{۲}$ ۲) $m > ۱$ ۳) $m > \frac{۲}{۳}$ ۴) $m < \frac{۲}{۳}$

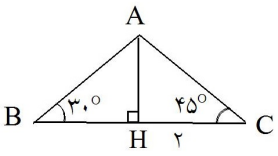
۱۲- اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ باشد کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $Cos x > \frac{Sin x}{x}$ ۲) $\frac{Sin x}{x} > ۱$ ۳) $Cos x < \frac{Sin x}{x}$ ۴) $Sin x > x > tan x$

۱۳- اگر $x = \frac{\pi}{۱۸}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{Sin\ ۳x}{Cos\ ۶x} + \frac{Cos\ ۴x}{Sin\ ۵x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴- در شکل مقابل، مقدار BH کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\hat{A} = ۹۰^{\circ}$ ، $BC = ۵$ و $AC = ۳$ می‌باشد. حاصل $(Cos B - Sin B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۶- حاصل $Cos^{۲}۶۰ + Sin^{۲}۴۵ + tg^{۲}۳۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۰}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{۸}{۱۲}$

۱۷- اگر $tan\theta = -\frac{۱}{۲}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم واقع باشد، $Sin\theta$ کدام است؟

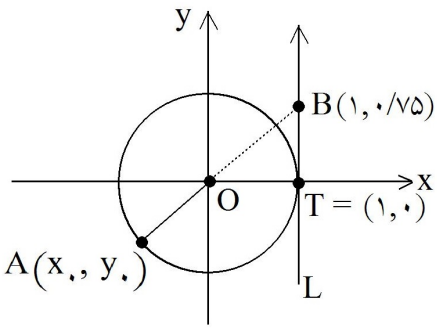
۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

۱۸- عبارت $\tan\theta(\tan\theta + \cot\theta)$ $(\theta \neq \frac{k\pi}{۲})$ برابر با کدام گزینه است؟

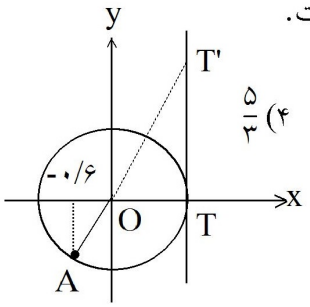
۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\frac{۱}{\sin^۲\theta}$ ۴) $\frac{۱}{\cos^۲\theta}$

۱۹- مطابق شکل، نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰)$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد و امتداد پاره‌خط واصل مبدأ مختصات و نقطه‌ی A خط L را که در نقطه‌ی $T(۱,۰)$ بر دایره مماس است در نقطه‌ی $B(۱, ۰/۷۵)$ قطع کرده است. حاصل $x_۰ + y_۰$ کدام است؟



۱) -۰/۸
۲) -۱
۳) -۱/۲
۴) -۱/۴

۲۰- در شکل مقابل، طول نقطه‌ی A که روی دایره‌ی مثلثاتی واقع است، برابر (-۰/۶) است. طول پاره‌خط TT' کدام است؟



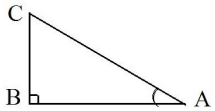
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۲۱- ساده شده‌ی عبارت $a = \frac{\sin x - \sin^۳ x}{\cos x + \sin x \cos x} - \tg x$ همواره کدام است؟

$(\sin x \neq -۱ \ , \ \cos x + \sin x \cos x \neq ۰)$

۱) $\frac{\sin^۲ x}{\cos x}$ ۲) $\frac{-\sin^۲ x}{\cos x}$ ۳) $\frac{\cos^۲ x}{\sin x}$ ۴) $-۲\tg x$

۲۲- در شکل مقابل، $\hat{A} = ۳۰^\circ$ و $BC = ۲$ است. $\cos\hat{C}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۳- حاصل $\sin^۲ x(۱ + \cos^۲ x) + \cos^۲ x(۱ - \sin^۲ x)$ همواره کدام است؟

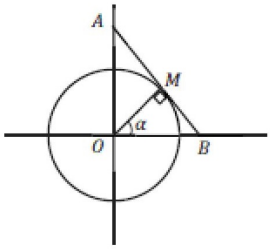
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\cos^۲ x$ ۴) $\sin^۲ x$

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

۲۴- حاصل $\sin ۳۰^\circ \operatorname{tg} ۶۰^\circ$ برابر است با:

۱) $\sin^۲ ۴۵^\circ$ ۲) $\sqrt{۳}\sin^۲ ۴۵^\circ$ ۳) $۲\cos ۳۰^\circ \operatorname{tg} ۳۰^\circ$ ۴) $\sqrt{۳}\cos^۲ ۳۰^\circ$

۲۵- با توجه به دایره‌ی مثلثاتی زیر کدام پاره خط برابر $\frac{۱}{\sin \alpha}$ می‌باشد؟



۱) OB ۲) OA
۳) AB ۴) MB

۲۶- اگر $\cos \theta = \frac{۵}{۳} - ۱$ و $\cos \theta \tan \theta > ۰$ باشد انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۷- حاصل عبارت $(\cos \theta + ۱)(\cos \theta - ۱) + \cos^۲ \theta (۱ + ۲\tan^۲ \theta)$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۸- اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}$ باشد، حاصل $\frac{\cos^۴ x - \sin^۴ x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۲۹- اگر $\sin x = ۲\cos x$ باشد ، حاصل $\cot x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۰- اگر $\tan x \sin x < ۰$ و $\cot x \cos x > ۰$، آن‌گاه انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۱- اگر $-۲۵^\circ < x < ۳۰^\circ$ و $\cos ۲x = \frac{۲m - ۱}{۲}$، آن‌گاه حدود تغییرات m در کدام فاصله است؟

۱) $(۱ , \frac{۳}{۲}]$ ۲) $[\frac{۱}{۲} , \frac{۵}{۲})$ ۳) $(۱ , \frac{۳}{۲})$ ۴) $(\frac{۱}{۲} , \cos ۵۰^\circ)$

۳۲- اگر $\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha < ۰$ و $\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha > ۰$، آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

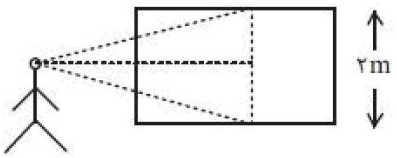
۳۳- فرض کنیم مکان یک جسم غوطه‌ور در آب نسبت به زمان با معادله‌ی $h = Sin^{۲}t + ۲Sint + ۹$ تغییر کند که در آن h ارتفاع جسم از کف استخر برحسب متر و t زمان است. اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین ارتفاع جسم از کف استخر چند متر است؟

۱) ۹ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۲

۳۴- اگر $\alpha - \beta = \frac{\pi}{۲}$، کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست است؟

۱) $Cos\alpha = Sin\beta$ ۲) $Sin\alpha = Cos\beta$ ۳) $tg\alpha = Cotg\beta$ ۴) $Cotg\alpha = tg\beta$

۳۵- در یک نمایشگاه نقاشی زهره مقابل یک تابلوی ۲ متری ایستاده است. اگر او سر خود را تکان ندهد بالای تابلو را تحت زاویه‌ی ۴۵° و پایین آن را تحت زاویه‌ی ۳۰° می‌بیند. فاصله‌ی زهره تا تابلو چند متر است؟



۱) $۳ - \sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۳} - ۱$

۳) $۶ - \sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۶} - ۱$

۳۶- در مثلث ABC بین اضلاع رابطه‌ی $AB = ۲BC$ برقرار است و $\hat{A} = ۳۰^\circ$، آن‌گاه نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه

۳) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ۴) منفرجه‌الزاویه

۳۷- در یک متوازی‌الاضلاع یکی از زاویه‌ها ۱۲۰° و طول اضلاع مجاور ۳ و ۵ سانتی‌متر ست. مقدار عددی نسبت قطر بزرگ به مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $\frac{۱۴}{۱۵\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۴}{۱۰۵\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۲۸}{۱۵\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۲}{۱۰۵\sqrt{۳}}$

۳۸- اگر $Sin^{۲}x.cotx < ۰$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه دایره‌ی مثلثاتی واقع نیست؟

۱) دوم یا چهارم ۲) اول یا چهارم ۳) اول یا دوم ۴) اول یا سوم

۳۹- در کدام ناحیه از دایره‌ی مثلثاتی، $\frac{Sin\alpha}{tan\alpha} < ۰$ و $tan\alpha = -\frac{۲}{۳}$ است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

۴۰- در مثلثی $a = ۶$, $b = ۶\sqrt{۳}$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{۶}$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟

۱) فقط $\frac{\pi}{۳}$ ۲) فقط $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{\pi}{۶}$

۴۱- اگر $\tan\alpha + \sin\alpha < ۰$ و $\sin\alpha \tan\alpha > ۰$ ، آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۴۲- حاصل عبارت $\tg\frac{\pi}{۱۳} + \tg\frac{۲\pi}{۱۳} + \tg\frac{۳\pi}{۱۳} + \ldots + \tg\frac{۱۳\pi}{۱۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $۲\tg\frac{\pi}{۱۳}$ ۴) ۲

۴۳- اگر $-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ و $۳\cos ۳x = ۳m - ۱$ باشد، m کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۴۴- کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) $\cos ۵° < \cos ۱۰°$ ۲) $\cos ۵° > \sin ۸۴°$ ۳) $\sin ۵° > \sin ۱۰°$ ۴) $\cot ۵° < \tan ۸۴°$

۴۵- اگر $\pi < \theta < \frac{۷\pi}{۶}$ حاصل $A = \sqrt{\sin^۲\theta(۱ + \cotg\theta) + \cos^۲\theta(۱ + \tg\theta)}$ کدام است؟

۱) $-(\sin\theta + \cos\theta)$ ۲) $\sin\theta + \cos\theta$
۳) $\sin\theta - \cos\theta$ ۴) $-\sin\theta + \cos\theta$

@hamkelasiapp Hamkelasi.ir

۵.۲ کلید تست های فصل دوم

	۱	۲	۳	۴		۱	۲	۳	۴
۱ -	□	□	□	■	۳۷ -	■	□	□	□
۲ -	□	□	□	■	۳۸ -	□	□	□	■
۳ -	□	□	□	■	۳۹ -	□	■	□	□
۴ -	■	□	□	□	۴۰ -	□	□	□	■
۵ -	□	□	□	■	۴۱ -	□	□	□	■
۶ -	□	□	□	■	۴۲ -	□	■	□	□
۷ -	■	□	□	□	۴۳ -	■	□	□	□
۸ -	□	□	□	■	۴۴ -	□	■	□	□
۹ -	□	□	■	□	۴۵ -	■	□	□	□
۱۰ -	□	□	□	■					
۱۱ -	■	□	□	□					
۱۲ -	□	□	■	□					
۱۳ -	□	□	□	■					
۱۴ -	■	□	□	□					
۱۵ -	■	□	□	□					
۱۶ -	□	□	■	□					
۱۷ -	□	□	■	□					
۱۸ -	□	□	□	■					
۱۹ -	□	□	□	■					
۲۰ -	■	□	□	□					
۲۱ -	□	■	□	□					
۲۲ -	□	■	□	□					
۲۳ -	■	□	□	□					
۲۴ -	□	■	□	□					
۲۵ -	□	■	□	□					
۲۶ -	□	■	□	□					
۲۷ -	□	□	■	□					
۲۸ -	□	□	□	■					
۲۹ -	□	□	■	□					
۳۰ -	□	■	□	□					
۳۱ -	■	□	□	□					
۳۲ -	□	□	□	■					
۳۳ -	□	■	□	□					
۳۴ -	□	■	□	□					
۳۵ -	■	□	□	□					
۳۶ -	□	■	□	□					